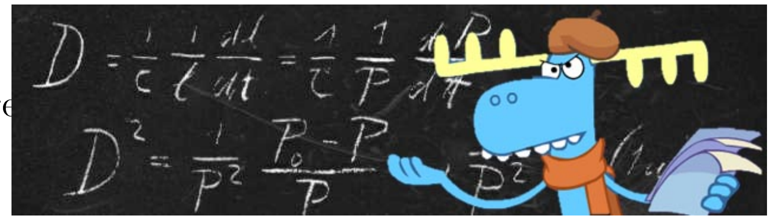
Interpolation

Séminaire 

1 Esprit Général

Notations :
Dans toute la suite on considérera des espaces de Lebesgue $L^p(\mu)$ où l'indice p sera toujours pris dans $[1, +\infty]$. Par ailleurs l'espace mesuré considéré sera muni d'une mesure borélienne, $\sigma-$finie, sans atomes et régulière. Typiquement c'est le cas lorsque μ est la mesure de Lebesgue sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

On exposera des théorèmes phares sans démonstrations pour nous concentrer sur leurs applications, qui seront pour la plupart des résultats classiques, connus indépendamment de l'interpolation, mais qui ici offrent une relecture particulièrement simple grâce à cette théorie.

Proposition 1 (Hölder) *Soit $f \in L^p \cap L^q$ avec $p, q \geq 1$ et $\theta \in]0, 1[$.*

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q} \qquad \textbf{Alors} \qquad \|f\|_r \leq \|f\|_p^{1-\theta} \|f\|_q^{\theta}$$

* **Interprétation Fonctionnelle**
On considère l'injection canonique $\varphi : D' \longrightarrow D'$ celle-ci envoie continuement

$$\varphi : L^p \cap L^q \xrightarrow{C^0} L^p \qquad \text{et} \qquad \varphi : L^p \cap L^q \xrightarrow{C^0} L^q$$

Hölder nous dit que $\varphi : L^p \cap L^q \xrightarrow{C^0} L^r$ Ainsi l'opérateur φ envoie continuement les $L^p \cap L^q$ sur des espaces "intermédiares" entre L^p et L^q : les L^r avec $p < r < q$. C'est le point de vue concret de l'interpolation.

* **Interprétation Spatiale**
les espaces "intermédiares" $[L^p, L^q]_\theta := L^r$ sont indéxés par un paramètre réel θ et vérifient

$$L^p \cap L^q \overset{C^0}{\subset} [L^p, L^q]_\theta$$

C'est le point de vue abstrait de l'interpolation

2 Interpolation d'Opérateurs

2.1 Interpolation Complexe

2.1.1 Un théorème Phare

Théorème 2 (Riesz-Thorin) *Soit T un opérateur* **linéaire** *soient $p_0, p_1, q_0, q_1 \geq 1$ tq*

$$T : L^{p_i} \xrightarrow{C^0} L^{q_i} \qquad i = 0, 1$$

On note k_i les normes respectives. Alors pour tout $\theta \in [0, 1]$

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad et \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \Longrightarrow T : L^{p_\theta} : \xrightarrow{C^0} L^{q_\theta}$$

et la norme k_θ vérifie l'inégalité fortement convexe : $k_\theta \leq k_0^{1-\theta} k_1^\theta$

♣

2.1.2 Application

Application

Lemme 3 (Schur) *Soit $K(x, y)$ $\mu \otimes \mu$- mesurable et tq*

$$\sup_x \int |K(x, y)| d\mu(y) \leq C_0 \qquad et \qquad \sup_y \int |K(x, y)| d\mu(x) \leq C_1$$

Alors l'Opérateur T construit à partir du noyau K

$$Tf(x) = \int K(x, y) f(y)\, d\mu(y)$$

envoie continuement L^p dans lui-même avec $1 \leq p \leq \infty$

$$\|Tf\|_p \leq C_0^{\frac{1}{p}} C_1^{1-\frac{1}{p}} \|f\|_p$$

Preuve La première estimée de K nous dit que T envoie continuement L^∞ dans lui-même. La deuxième nous dit que son adjoint T^* envoie lui aussi L^∞ dans lui-même, et donc par un argument de dualité, T envoie continuement L^1 dans lui-même... Ne reste plus qu'a appliquer le théorème d'interpolation à T avec $p_0 = q_0 = +\infty$ et $p_1 = q_1 = 1$. •

Théorème 4 (Inégalité de Haussdorf-Young - Fourier Continue)
On note $\hat{f}$ la transformée de Fourier d'un fonction f

$$\mathcal{F}f(y) = \int f(x) e^{ixy} dx$$

On a alors pour tout $1 \leq p \leq 2$

$$\|\mathcal{F}f\|_{p'} \leq (2\pi)^{n(1-1/p)} \|f\|_p \qquad avec \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

♣

Preuve Par Plancherel on sait que $\mathcal{F}$ envoie continuement L^2 dans lui-même avec une norme $\leq (2\pi)^{\frac{n}{2}}$. Par ailleurs par une majoration "‘brutale"’ on a

$$\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_1$$

On conclut en appliquant le théorème d'interpolation à $\mathcal{F}$ avec $p_0 = q_0 = 2$ et $p_1 = 1$, $q_1 = +\infty$ •

Voici une version concernant les coefficients de Fourier.

Théorème 5 (Inégalité de Haussdorf-Young - Fourier Continue) *Soit $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille uniformément bornée de $L^2(\mu)$. On note $\hat{f}(n) =< f, \psi_n >_{L^2}$ le coefficient de Fourier associé à un élément $f \in L^2(\mu)$. On a alors pour tout $1 \leq p \leq 2$*

$$\|\hat{f}\|_{\ell^{p'}} \leq M^{\frac{2-p}{p}} \|f\|_{L^p} \qquad \textit{avec} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

♣

Théorème 6 (Inégalité de Young) *On note $f * g$ la convolée de deux fonctions f et g*

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)d\mu(y)$$

On a alors pour tout $1 \leq p, q, r \leq 2$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \Longrightarrow \|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

♣

Preuve Par une majoration brutale on voit que (appliquer Hölder).

$$|(f * g)(x)| \leq \int |f(x-y)g(y)|d\mu(x) \leq \|f(x-\cdot)\|_p \|g\|_{p'} = \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

D'où l'inegalité annoncée pour $r = +\infty$ et p quelconque $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$
De même par le lemme de Schur appliqué au noyau $K(x, y) = f(y - x)$ (ici $C_0 = C_1 = \|f\|_1$)

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$$

Soient p, q et r tq

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

Interpolons l'opérateur $T_f g = f * g$ entre $p_0 = p'$ $q_0 = +\infty$ et $p_1 = 1$, $q_1 = p$ pour voir que pour $\theta = \frac{p}{r}$

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p'} + \theta = \frac{1}{q} \quad \text{et} \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{\theta}{p} = \frac{1}{r}$$

D'où

$$\|f * g\|_r = \|T_f g\|_{q_\theta} \leq \|f\|_p^{1-\theta} \|f\|_p^\theta \|g\|_{p_\theta} = \|f\|_p \|g\|_q$$

•

2.1.3 Généralisation

L'interpolation permet d'enrichir la connaissance d'estimées pour un opérateur donné. Nous allons voir comment, on peut parvenir à une seule estimée pour un opérateur donné, lorsque l'on connait des estimées uniqument pour des pertubations régulières de celui-ci.

Plus concrétement Connaissant des estimées pour des Opérateurs S et U, on en déduit une éstimée pour un opérateur T si celui-ci s'inscrit dans la continuité "régulière" des opérateurs S et U.

Théorème 7 (Stein) *Soit $(T_z)_{z\in\bar{S}}$ une famille d'opérateurs avec $S = \{0 < Re(z) < 1\}$ définis sur les fonctions simples.*
On suppose de plus que pour f et g deux fonctions simples quelconques l'application

$$z \mapsto \int fT_z g d\mu$$

est analytique sur S et continue sur $\bar{S}$.
Pour des raisons techniques, on veutr controler la croissance de cet opérateur, on suppose également que pour un certain $a < \pi$.

$$\forall z = x + iy \in S, \qquad e^{-a|y|} \ln\left(\int fT_z g d\mu\right) \leq C$$

On se donne alors les conditions au bord :

$$\|T_{iy}f\|_{q_0} \leq M_0(y)\|f\|_{p_0} \qquad et \qquad \|T_{1+iy}f\|_{q_1} \leq M_1(y)\|f\|_{p_1}$$

Si M a une croissance controlée, i.e. pour un certain $b < \pi$

$$\forall z = x + iy \in S, \qquad e^{-b|y|} \ln\left(M_i(y)\right) \leq C \qquad i = 0, 1$$

Alors on a le résultat d'interpolation suivant

$$\forall \theta \in [0,1], \qquad \|T_\theta f\|_{q_\theta} \leq C_\theta \|f\|_{p_\theta}$$

Dès que

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad et \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

♣

2.2 Interpolation Réelle

2.2.1 Un théorème Phare

Définition 2.1 (espace $L^{p,\infty}$) *On dit qu'une fonction f est de type L^p-faible lorsque*

$$\|f\|^*_{p,\infty} := \sup_{s>0} s^p \mu\left(\{|f| \geq s\}\right) < \infty$$

Par convention $L^{\infty,\infty} = L^\infty$
Un Opérateur T sera dit de type (p,q)-faible lorsqu'il envoie continuement L^p dans $L^{q,\infty}$, i.e.

$$\exists k \geq 0, \ \forall s > 0, \qquad \mu\left(\{|Tf| \geq s\}\right) \leq \left[\frac{k}{s}\|f\|_p\right]^q$$

Le meilleur k est la norme (p,q)-faible de l'opérateur. ♠

Exemple: l'injection canonique envoie L^p dans $L^{p,\infty}$ grâce à l'inégalité de Tchebychev :

$$s^p \mu(\{|f| \geq s\}) \leq \int_{\{|f|\geq s\}} |f|^p \, d\mu$$

Théorème 8 (Marcinkievicz) *Soit T un opérateur* **quasi sous-additif**

$$|T(f+g)| \leq \kappa (|T(f)| + |T(g)|)$$

On suppose de plus que son domaine est stable par troncature.
soient $p_0 \leq q_0$ et $p_1 \leq q_1$ positifs tq T est de type (p_i, q_i)-faible.

$$T : L^{p_i} \xrightarrow{C^0} L^{q_i,\infty} \qquad i = 0, 1$$

On note k_i les normes respectives. Alors pour tout $\theta \in]0,1[$

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad et \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \Longrightarrow T : L^{p_\theta} : \xrightarrow{C^0} L^{q_\theta}$$

et la norme k_θ vérifie l'inégalité faiblement convexe : $k_\theta \leq M k_0^{1-\theta} k_1^\theta$

♣

La preuve est simple et n'utilise que la formule de Minkowski généralisée et la caractérisation des normes L^p à l'aide de la fonction de répartition

$$\lambda_f(s) := \mu(\{|f| \geq s\}) \Longrightarrow \|f\|_p^p = \int_0^{+\infty} s^p \, d[-\lambda(s)]$$

Notons que la fonction λ_f est continue à droite et décroissante, on peut donc interpréter l'intégrale ci-dessus de plusieurs facons équivalentes : Intégrale de Stieltjes, intégrale par rapport la mesure $d[-\lambda(s)] = -\lambda'(s)\, ds$ où λ' est une dérivée presque-partout de λ ou encore au sens faible, ou bien encore au sens des mesures.

2.2.2 Application

Théorème 9 *Soit f une fonction mesurable de $\mathbb{R}^n$, on note Mf la fonction maximale associée :*

$$Mf(x) := \sup_{B \in B(x)} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| \, d\mu$$

où $B(x)$ est l'ensemble des boules centrées en x.
Alors l'opérateur M est de type $(1,1)$-faible et envoie continuement L^p dans lui-même pour tout $p > 1$.

♣

Preuve Le caractère $(1,1)$-faible s'obtient par un lemme de recouvrement par des boules dont on contrôle le volume et le rayon.
Par ailleurs le caractère sous-additif de M et sa continuité (∞,∞)-"faible" sont immédiates, on conclut alors grace au Théorème de Marcinkievicz.

•

Plusieurs variantes de fonction maximales existent (suivant le centre, le rayon ou la géométrie des boules choisies) elles aboutissent au même résultat.
Voici une des conséquences les plus célèbre : le théorème de dérivation de Lebesgue

$$f \in L^1_{loc} \Longrightarrow \lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f \, d\mu = f(x) \qquad p.p.t.\ x$$

En application de l'Opérateur Maximal, voyons un petit résultat d'interpolation

Théorème 10 *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, une fonction de classe C^l* **Alors**

$$\forall p > 1,\ \ \forall\, 0<m<l \qquad \|D^m f\|_p \leq C\,\|f\|_q^{\theta} \cdot \|D^l f\|_r^{1-\theta} \qquad (0<\theta<1)$$

$$\textit{avec}\, q,\ r\ \textit{et}\ \theta\ \textit{choisis tel que} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{p} & = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{r} \\ m & = l(1-\theta) \end{array} \right.$$

avec $\forall x,\ \ D^m f(x) = \sup_{|i|=m} |\partial^i f(x)|$

♣

Démonstration Faisons quelques remarques d'algèbre linéaire. Dans l'espace $\mathbb{R}_k[X_1, \ldots, X_n]$ qui est de dimension finie, les normes

$$\|P\|_{max} \overset{def}{=} \sup_{0\leq|i|\leq k} |a_i| \qquad \text{et} \qquad \|P\|_{moy} \overset{def}{=} \int_{\|h\|<1} P(h)\, dh$$

sont donc équivalentes, avec $P(X) = \sum_{0\leq|i|\leq k} a_i\, X^i$ et $X^i \overset{def}{=} X^{i_1} \cdots X^{i_n}$.

En particulier par un changement de variable $h \mapsto rh$, on voit que

$$\|P\|_{max} \leq C\|P\|_{moy} \Longrightarrow \sup_{0\leq|i|\leq k} r^{|i|}|a_i| \leq \frac{C}{r^n} \int_{\|h\|<r} |P(h)|\, dh$$

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction f, on a

$$f(x+h) = f(x) + \underbrace{\sum_{0<|\alpha|<l} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha}_{P_x(h)} + l\int_0^1 (1-t)^{l-1} \sum_{|\alpha|=l} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(x+th)\, dt \tag{1}$$

on a pour chaque x, $P_x \in \mathbb{R}_k[X_1, \ldots, X_n]$ avec k=l-1

Appliquons ce qui précède a P_x, on a pour tout $0 < m < l$

$$\exists C > 0,\ \ \forall r,\ \ \forall x, \quad r^m |D^m f(x)| \leq \frac{Cte}{r^n} \int_{\|h\|<r} |P_x(h)|\, dh \tag{2}$$

Or grâce à (1), on a

$$|P_x(h)| \leq |f(x)| + |f(x+h)| + l\int_0^1 (1-t)^{l-1} \sum_{|\alpha|=l} \left| \frac{h^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(x+th) \right| dt \tag{3}$$

Comme

$$\int_{\|h\|<r} |h^\alpha \partial^\alpha f(x+th)|\ dh \leq r^{|\alpha|} \int_{\|h\|<r} |\partial^\alpha f(x+th)|\ dh$$

On voit donc, en intégrant (3) et utilisant le lemme de Fubini, que

$$r^m |D^m f(x)| \leq Cte \left[Mf(x) + r^l M(D^l f)(x) \right]$$

D'où, en optimisant par rapport à r, on trouve

$$|D^m f(x)| \leq \tilde{C}\, [Mf(x)]^\theta \left[M(D^l f)(x) \right]^{1-\theta} \quad \textit{avec}\ \ m = l(1-\theta)$$

L'inégalité de Hölder nous montre alors que

$$\|D^m f\|_p^p \leq \tilde{C}^p \|Mf^{p\theta}\|_{q'} \|M(D^l f^{p(1-\theta)})\|_{r'} \quad avec \ \ 1/q' + 1/r' = 1$$

Posons $q = pq'\theta$ et $r = pr'(1-\theta)$ on a alors $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{r}$ et...

$$\|D^m f\|_p^p \leq \tilde{C}^p \|Mf\|_q^{p\theta} \|M(D^l f)\|_r^{p(1-\theta)}$$

puisque $\|h^a\|_b = \|h\|_{ab}^a$
La continuité de la fonction Maximale, nous permet alors de conclure •

2.2.3 Généralisation

On peut généraliser le théorème de Marcinkievicz aux espaces de Lorentz, définis à l'aide des réarrengements croissants

$$f^*(t) := \inf\{s > 0 \ \mid \ \lambda_f(s) \leq t\}$$

cette fonction est une quasi-récirpoque de λ_f au sens ou

1. si λ_f est continue, c'est sa réciproque.
2. si $\lambda_f(s) < \infty$ alors $f(\lambda_f(s)) \leq s$
3. $(\lambda_f(f(t))) \leq t$
4. $\lambda_f = \lambda_{f^*}$

Tracer les différents graphes lorsque f est simple.

Définition 2.2 (espaces de Lorentz $L^{p,q}$) *On dit qu'une fonction f est dans l'espace de Lorentz $L^{p,q}$ lorsque*

$$\|f\|_{p,q}^* := \left(\frac{q}{p}\int_0^{+\infty} [t^{\frac{1}{p}} f^*(t)]^q \, \frac{dt}{t}\right) < \infty$$

Par convention $L^{\infty,\infty} = L^\infty$
Un Opérateur T envoi continuement $L^{p,q}$ dans $L^{\pi,\rho}$ signifie

$$\|Tf\|_{\pi,\rho}^* \leq k\|f\|_{p,q}^*$$

Le meilleur k sera appelé la norme de l'opérateur (même si, tout comme $\|\cdot\|_{p,q}^*$, il ne s'agit pas d'une norme). ♠

Proposition 11 *Les espaces de Lorentz $L^{p,q}$, sont métrisables (avec une métrique équivalente $\|\cdot\|_{p,q}^*$) en des espaces de Banach. ils vérfient*

i $L^{p,p} = L^p$ *avec équivalence des normes*

ii lorsque $q_1 \leq q_2$ *on a quel que soit* $p \geq 1$ $L^{p,q_1} \overset{C^0}{\subset} L^{p,q_2}$

iii pour $1 < p, q < \infty$ *on a* $(L^{p,q})' = L^{p',q'}$ *et* $(L^{p,1})' = L^{p',\infty}$

Théorème 12 (Marcinkievicz pour les Espaces de Lorentz) *Soit T un opérateur* **sous-additif***, dont le domaine est stable par troncature et contient les fonctions simples.*

.

Soient $p_0 < p_1$, $\pi_0 \neq \pi_1$ et ρ_0, ρ_1, q_0, q_1 pris dans $[1, +\infty]$ tq

$$T : L^{p_i,q_i} \overset{C^0}{\longrightarrow} L^{\pi_i,\rho_i} \qquad i = 0, 1$$

Alors pour tout $\theta \in]0,1[$ et tout $\rho \leq q$ il existe une constante B_θ tel que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad et \quad \frac{1}{\pi} = \frac{1-\theta}{\pi_0} + \frac{\theta}{\pi_1} \Longrightarrow \|Tf\|^*_{\pi,\rho} \leq B_\theta \|f\|^*_{p,q}$$

♣

Théorème 13 (Inégalité de Haussdorf-Young - version faible) *Soit $f \in L^p\mathbb{R}^n$ et $1 < p \leq 2$ Alors*

$$\|\mathcal{F}f\|^*_{p',p} \leq B\|f\|_p \qquad avec \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

♣

Preuve

$$\mathcal{F} : L^1 \quad \xrightarrow{C^0} \quad L^{\infty,\infty}\mathcal{F} : L^2 \quad \xrightarrow{C^0} \quad L^{2,\infty}$$

•

Théorème 14 (Inégalité de Young - version faible) *Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \Longrightarrow \|f * g\|_r \leq C_{pq}\|f\|_p\|g\|_{q,\infty}$$

♣

D'où puisque $|y|^{-\alpha} \in L^{\frac{n}{\alpha}}$ on trouve

Corollaire 15 (Inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev) *Soit $0 < \alpha < n$ et $1 < p < q < +\infty$ alors il existe une constante A_{pq} tq*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{n-\alpha}{n} \Longrightarrow \|f * |y|^{-\alpha}\|_q \leq A_{pq}\|f\|_p$$

3 Espaces d'Interpolation

En reprenant les exemples ci-dessus, on voit que :

- Notons $\Omega_p^m = \{f;\ \|D^m f\|_p < +\infty\}$ on voit que sur le graphe d'axes $(1/p, m)$ l'interpolé des espaces correspondant ne parcours que le segment joignant les points extrêmes.
- Sur le graphe d'axes $(1/p, 1/q)$ le Théorème de Marccienkievicz classique nous donne toutes les interpolés se trouvant sur la diagonale joignant les points d'abcisses correspondant aux extrêmes. Alors que le Théorème d'interpolation sur les esoaces de Lorentz, nous donne toute une bande d'interpolation.
- De même on peut étendre la famille des espaces de Sobolev W_p^k à une famille plus large qui nous donne une bande d'interpolation plus large, ces sont les espaces de Besov $B^s_{p,q}$.

Pour les définir nous allons introduire la notion abstraite et générale d'espaces d'interpolation réelle par la Méthode discrète.

Cadre général Soient A_0 et A_1 deux Banachs compatibles (s'injectant continuement dans un espace vectoriel topologique : D' par exemple)

Alors l'espace $A_0 + A_1$ est un Banach pour la norme

$$\|a\|_{A_0+A_1} = \min_{a=a_0+a_1} \|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}$$

De même, l'espace $A_0 \cap A_1$ est un Banach pour la norme

$$\|a\|_{A_0\cap A_1} = \max[\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}]$$

Notre But est de construire toute une famille d'espaces de Banach intermédiaire notés $[A_0, A_1]_{\theta,q}$ On a déjà les injections continues

$$A_0 \cap A_1 \xrightarrow{C^0} A_0, A_1 \xrightarrow{C^0} A_0 + A_1$$

Et pour les opérateurs on a le premier résultat d'interpolation.

Proposition 16 *Soient* (A_0, A_1) *et* (B_0, B_1) *deux couples compatibles.*

$$\left.\begin{array}{l} T : A_0 \to B_0 \\ T : A_0 \to B_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} T : A_0 \cap A_1 \to B_0 \cap B_1 \\ T : A_0 + A_1 \to B_0 + B_1 \end{array}\right.$$

3.1 La J-Méthode

Munissons $A_0 \cap A_1$ d'une nouvelle norme de Banach

$$J(t, a) = \max[\|a\|_{A_0}, t\|a\|_{A_1}]$$

On pose alors

$$[A_0, A_1]_{\theta,q,J} := \left\{ a \in A_0 + A_1, \quad a = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \quad \text{avec } a_j \in A_0 \cap A_1 \text{ et } \ 2^{-j\theta} J(2^j, a) \in \ell^q(\mathbb{Z}) \right\}$$

muni de la norme

$$\|a\|_{[A_0,A_1]_{\theta,q,J}} := \min_{a=\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j} \|2^{-j\theta} J(2^j, a)\|_{\ell^q(\mathbb{Z})}$$

c'est un Banach qui s'injecte continuement dans $A_0 + A_1$

Remarque 3.1 *cet espace est bien défini car* $\sum_{j\le 0} \|a_j\|_{A_0} < +\infty$ *et* $\sum_{j>0} \|a_j\|_{A_1} < +\infty$

Proposition 17 (Interpolation) *Supposons que*

$$\left\{\begin{array}{l} T : A_0 \to B_0 \\ T : A_0 \to B_0 \end{array}\right.$$

Alors pour tout $\theta \in]0, 1[$ *et tout* $q \in [1, +\infty]$ *on a*

$$T : [A_0, A_1]_{\theta,q,J} \longrightarrow [B_0, B_1]_{\theta,q,J}$$

3.2 La K-Méthode

Munissons $A_0 + A_1$ d'une nouvelle norme de Banach

$$K(t, a) = \min_{a=a_0+a_1} \|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}$$

On pose alors

$$[A_0, A_1]_{\theta,q,K} := \left\{ a \in A_0 + A_1, \quad 2^{-j\theta} K(2^j, a) \in \ell^q(\mathbb{Z}) \right\}$$

muni de la norme

$$\|a\|_{[A_0,A_1]_{\theta,q,K}} := \|2^{-j\theta} K(2^j, a)\|_{\ell^q(\mathbb{Z})}$$

c'est un Banach qui s'injecte continuement dans $A_0 + A_1$

Théorème 18 (Equivalence) *Pour tout* $\theta \in]0,1[$ *et tout* $q \in [1,+\infty]$ *on a*

$$[A_0, A_1]_{\theta,q,J} = [A_0, A_1]_{\theta,q,K}$$

avec équivalence des normes

♣

Remarque 3.2 *On note alors indistinctement* $[A_0, A_1]_{\theta,q}$ *pour les deux méthodes et on a les injections continues*

$$A_0 \cap A_1 \xrightarrow{C^0} [A_0, A_1]_{\theta,q} \xrightarrow{C^0} A_0 + A_1$$

On a les propriétes suivantes

Proposition 19 *On pose* $\bar{A} = (A_0, A_1)$ *on a*

1. $[A_0, A_1]_{\theta,q} = [A_1, A_0]_{1-\theta,q}$
2. $q \le r \Longrightarrow \bar{A}_{\theta,q} \subset \bar{A}_{\theta,r}$ *continuement*
3. $\theta_0 < \theta < \theta_1 \Longrightarrow \bar{A}_{\theta_0,q} \cap \bar{A}_{\theta_1,q} \subset \bar{A}_{\theta,q}$ *continuement*
4. $A_1 \subset A_0$ *et* $\theta_0 < \theta_1 \Longrightarrow \bar{A}_{\theta_1,q} \subset \bar{A}_{\theta_0,q}$
5. $(A_0, \|\cdot\|_{A_0}) = (A_1, \|\cdot\|_{A_1}) \Longrightarrow \bar{A}_{\theta,q} = A_0 \quad \|a\|_{A_0} = [q\theta(1-\theta)]^{1/q}\|a\|_{\theta,q}$

3.3 Dualité

Proposition 20 *Supposons* $A_0 \cap A_1$ *dense dans* A_0 *et dans* A_1*, on a alors*

$$A_0' + A_1' = (A_0 \cap A_1)'$$

avec égalité des normes

Plus généralement

Théorème 21 *Supposons* $A_0 \cap A_1$ *dense dans* A_0 *et dans* A_1*.*
soient $1 \le q < +\infty$ *et* $0 < \theta < 1$ *et* $1/q + 1/q' = 1$ *on a alors*

$$[A_0, A_1]'_{\theta,q} = [A_0', A_1']_{\theta,q'}$$

avec équivalence des normes

♣

3.4 La Réitération

Définition 3.1 *Soit* X *un espace intermédiaire*

$$A_0 \cap A_1 \xrightarrow{C^0} X \xrightarrow{C^0} A_0 + A_1$$

On dit que X *est de classe* $\mathrm{C}_K(\theta, \bar{A})$
ssi $\forall a \in X, \forall t > 0 \quad K_{\bar{A}}(t,a) \le Ct^{\theta}\|a\|_X$
ssi $A_0 \cap A_1 \xrightarrow{C^0} X \xrightarrow{C^0} [A_0, A_1]_{\theta,\infty}$
ssi $\forall t > 0, \forall a = a_0 + a_1 \in A_0 + A_1 \begin{cases} \|a_0\|_{A_0} \le Ct^{\theta}\|a\|_X \\ \|a_1\|_{A_1} \le Ct^{\theta-1}\|a\|_X \end{cases}$

On dit que X *est de classe* $\mathrm{C}_J(\theta, \bar{A})$
ssi $\forall a \in A_0 \cap A_1, \forall t > 0 \quad \|a\|_X \leq Ct^{-\theta} J_{\bar{A}}(t,a)$
ssi $[A_0, A_1]_{\theta,1} \xrightarrow{C^0} X \xrightarrow{C^0} A_0 + A_1$
ssi $\forall t > 0, \forall a \in A_0 \cap A_1, \quad \|a\|_X \leq C\|a\|_{A_0}^{1-\theta}\|a\|_{A_1}^{\theta}$

On dit que X *est de classe* $\mathrm{C}(\theta, \bar{A})$ *lorsqu'il est de classe* $\mathrm{C}_K(\theta, \bar{A})$ *et* $\mathrm{C}_J(\theta, \bar{A})$

♠

exemple $X = [A_0, A_1]_{\theta,q}$ est de classe $C(\theta, \bar{A})$ pour tout $q \in [1, +\infty]$

Théorème 22 *Soient* $\bar{A}$ *et* $\bar{X}$ *deux couples compatibles tq*

$$X_i \in \mathrm{C}(\theta_i, \bar{A}) \qquad \theta_i \in [0,1],\ i = 0,1$$

Alors pour tout $q \in [1, +\infty]$ *et tout* $\theta \in]0,1[$ *on a avec équivalence des normes*

$$[X_0, X_1]_{\theta,q} = [A_0, A_1]_{\eta,q} \qquad \eta = (1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1$$

♣

3.5 Exemples

Méthode continue

$$[A_0, A_1]_{\theta,q} = \{a \in A_0 + A_1 \ \mid \ \|t^{-\theta}K(t,a)\|_{L^p(]0,+\infty[;\frac{dt}{t})} < \infty\}$$

$$[W_p^{k_0}, W_p^{k_1}]_{\theta,q} = B_{p,q}^s \qquad s = (1-\theta)k_0 + \theta k_1$$

$$L^{p,q} = [L^1, L^\infty]_{\theta,q} \qquad \text{avec } \frac{1}{p} = 1 - \theta$$