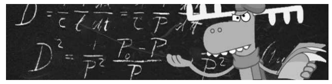
Notions de spectre d'opérateurs linéaires non bornés

(première partie)

ROUSSE Vidian

Séminaire **CARIBOU** du 31 janvier 2005



Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1 Opérateurs linéaires et notions de spectre

Définition 1 *Un* **opérateur linéaire** *sur $\mathcal{H}$ est la donnée d'un couple $(D(T), T)$ où*

- *$D(T)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ appelé* **domaine**,
- *$T : D(T) \to \mathcal{H}$ est une application linéaire.*

Soient S et T deux opérateurs linéaires. On dit que S est une **extension** *de T ce qu'on notera $T \subseteq S$ si*

- *$D(T) \subseteq D(S)$,*
- *$S_{|D(T)} = T$.*

On s'efforcera de travailler exclusivement avec des opérateurs dont le **domaine est dense dans $\mathcal{H}$**.

Exemple 1 On se place dans $\mathcal{H} = L^2([0,1]; \mathbb{C})$. On considère alors l'opérateur T_{-2} défini par

$$\mathcal{D}_{-2} := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^0([0,1]; \mathbb{C}) \quad / \quad \exists \psi \in \mathcal{H}, \quad \forall x \in [0,1], \quad \varphi(x) - \varphi(0) = \int_0^x \psi(y) dy \right\}$$

et $T_{-2}\varphi := i\psi$. Tout d'abord, T_{-2} est bien défini par le théorème de densité de Lebesgue, de plus, il est clair que $\mathcal{C}^1([0,1]; \mathbb{C}) \subset \mathcal{D}_{-2}$ et que si $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,1]; \mathbb{C})$ alors $T_{-2}\varphi = i\frac{d}{dx}\varphi$. On définit alors d'autres opérateurs T_{-1}, T_1, T_0 et T_2 en posant

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{-1} &:= \left\{ \varphi \in \mathcal{D}_{-2} \quad / \quad \varphi(0) = 0 \right\} \\
\mathcal{D}_{1} &:= \left\{ \varphi \in \mathcal{D}_{-2} \quad / \quad \varphi(1) = 0 \right\} \\
\mathcal{D}_{0} &:= \left\{ \varphi \in \mathcal{D}_{-2} \quad / \quad \varphi(0) = \varphi(1) \right\} \\
\mathcal{D}_{2} &:= \left\{ \varphi \in \mathcal{D}_{-2} \quad / \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \right\}
\end{aligned}$$

et $T_k := T_{-2_{|\mathcal{D}_k}}$.

On a

$$T_2 \subset \left\{ \begin{array}{c} T_{-1} \\ T_0 \\ T_1 \end{array} \right\} \subset T_{-2} \quad ; \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}T_{-2} &= \mathrm{Ker}T_0 = \mathbb{C}.1 && (2)\\
\mathrm{Ker}T_{-1} &= \mathrm{Ker}T_1 = \mathrm{Ker}T_2 = \{0\} && (3)\\
\mathrm{Im}T_{-2} &= \mathrm{Im}T_{-1} = \mathrm{Im}T_1 = \mathcal{H} && (4)\\
\mathrm{Im}T_0 &= \mathrm{Im}T_2 = \left\{\psi \in \mathcal{H} \quad / \quad \int_0^1 \psi(y)dy = 0\right\} = 1^{\perp}. && (5)
\end{aligned}$$

Exemple 2 On se place dans $\mathcal{H} = L^2([0,+\infty[;\mathbb{C})$. On considère alors l'opérateur T_∞ défini par

$$\mathcal{D}_\infty := \left\{\varphi \in \mathcal{C}_0^0([0,+\infty[;\mathbb{C}) \cap \mathcal{H} \quad / \quad \exists \psi \in \mathcal{H}, \quad \forall x \in [0,+\infty[, \quad \varphi(x) = \int_0^x \psi(y)dy\right\}$$

et $T_\infty\varphi := i\psi$ où $\mathcal{C}_0^0([0,+\infty[;\mathbb{C})$ désigne l'espace des fonctions continues de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{C}$ nulles au bord au sens où $\varphi(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$. Comme dans l'exemple précédent, il est clair que l'espace $\mathcal{C}_c^1(]0,+\infty[;\mathbb{C})$ des fonctions $\mathcal{C}^1$ à support compact dans $]0,+\infty[$ est inclus dans $\mathcal{D}_\infty$ et que si $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(]0,+\infty[;\mathbb{C})$ alors $T_\infty\varphi = i\frac{d}{dx}\varphi$.

Définition 2 *On définit*

- *l'***ensemble résolvant** *de T*

$$\rho(T) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} \quad / \quad (T - \lambda Id) : D(T) \to \mathcal{H} \text{ bijection d'inverse borné}\right\},$$

- *le* **spectre** *de T*

$$\sigma(T) := \mathbb{C} - \rho(T),$$

- *la* **résolvante** *de T*

$$\begin{array}{rccl} r_T: & \rho(T) & \to & \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ & z & \to & (T - zId)^{-1} \end{array}$$

  où $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ désigne l'espace des endomorphismes continues de $\mathcal{H}$ (opérateurs linéaires bornés de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$).

Lemme 1 *Soit T un opérateur linéaire. Alors $\sigma(T)$ est fermé dans $\mathbb{C}$.*

Preuve Cela découle du **théorème d'inversion locale** via la série de Neumann. □

Définition 3 *Soit T un opérateur linéaire dont le domaine est dense et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour l'opérateur $S = (T - \lambda Id) : D(T) \to \mathcal{H}$, on a l'arbre d'alternatives suivant :*

- *si S n'est pas injectif, on dit que λ est une* **valeur propre** *de T, on parle de* **spectre ponctuel** *de T qu'on notera $\sigma_P(T)$;*
- *sinon S est injectif et*
  - *si S n'est pas surjectif et*
    - *si l'image de S est dense dans $\mathcal{H}$, on parle de* **spectre continu** *de T qu'on notera $\sigma_{cont}(T)$;*
    - *sinon l'image de S n'est pas dense dans $\mathcal{H}$, on parle de* **spectre résiduel** *de T qu'on notera $\sigma_{res}(T)$;*
  - *sinon S est bijectif et*
    - *si S^{-1} n'est pas borné, on parle de* **spectre résiduel de type 2** *de T qu'on notera $\sigma'_{res}(T)$;*
    - *sinon S^{-1} est borné et $\lambda \in \rho(T)$ est un* **point résolvant** *de T.*

Exemple 1

$$\sigma(T_{-2}) = \sigma_P(T_{-2}) = \mathbb{C} \quad ; \tag{6}$$

$$\sigma(T_1) = \sigma(T_{-1}) = \emptyset \quad ; \tag{7}$$

$$\sigma(T_0) = \sigma_P(T_0) = 2\pi\mathbb{Z} \quad ; \tag{8}$$

$$\sigma(T_2) = \sigma_{res}(T_2) = \mathbb{C}. \tag{9}$$

Preuve

- Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $\varphi_\lambda(x) := e^{-i\lambda x}$. Alors $\varphi_\lambda \in \mathcal{D}_{-2}$ et $T_{-2}\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$ donc $\lambda \in \sigma_P(T_{-2})$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. $(T_{-1} - \lambda Id)$ est clairement injectif (car les seules fonctions propres éventuelles sont les multiples de φ_λ, qui n'appartient pas à $\mathcal{D}_{-1}$). En outre, si, pour $\psi \in \mathcal{H}$, on pose

$$(S_\lambda\psi)(x) := -i\int_0^x e^{i\lambda(y-x)}\psi(y)dy,$$

on a $(S_\lambda\psi)(0) = 0$, $S_\lambda\psi$ est continue (donc L^2) en tant que produit d'une exponentielle par une fonction $\frac{1}{2}$-hölderienne et, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
-i\int_0^x \big[\lambda(S_\lambda\psi)(y) + \psi(y)\big]dy &= -i\int_0^x \left(\int_0^y -i\lambda e^{i\lambda(z-y)}\psi(z)dz\right)dy - i\int_0^x \psi(y)dy \\
&= -i\int_0^x \left(\int_z^x -i\lambda e^{i\lambda(z-y)}dy\right)\psi(z)dz - i\int_0^x \psi(z)dz \\
&= -i\int_0^x \big(e^{i\lambda(z-x)} - 1\big)\psi(z)dz - i\int_0^x \psi(z)dz \\
&= (S_\lambda\psi)(x)
\end{aligned}$$

donc $S_\lambda\psi \in \mathcal{D}_{-1}$ et $T_{-1}S_\lambda\psi = \lambda S_\lambda\psi + \psi$. Autrement dit $(T_{-1} - \lambda Id)$ est surjectif. Enfin

$$|(S_\lambda\psi)(x)|^2 \leqslant \int_0^x e^{-2\Im\lambda(y-x)}dy \int_0^x |\psi(y)|^2 dy \leqslant e^{2|\Im\lambda|}\|\psi\|^2,$$

donc $(T_{-1} - \lambda Id)^{-1} = S_\lambda$ est borné.

- Si $\lambda \in 2\pi\mathbb{Z}$, $\varphi_\lambda \in \mathcal{D}_0$ donc $2\pi\mathbb{Z} \subseteq \sigma_P(T_0)$. Par ailleurs, soit $\lambda \in (\mathbb{C} - 2\pi\mathbb{Z})$. $(T_0 - \lambda Id)$ est clairement injectif. De plus, si $\psi \in \mathcal{H}$ et $C \in \mathbb{C}$, on a $(S_\lambda\psi + C\varphi_\lambda) \in \mathcal{D}_{-2}$ et

$$(T_{-2} - \lambda Id)(S_\lambda\psi + C\varphi_\lambda) = (T_{-1} - \lambda Id)S_\lambda\psi + C(T_{-2} - \lambda Id)\varphi_\lambda = \psi.$$

Il suffit donc de voir qu'on peut choisir $C(\psi)$ de façon à avoir $(S_\lambda\psi + C(\psi)\varphi_\lambda) \in \mathcal{D}_0$ pour obtenir que $(T_0 - \lambda Id)$ est surjectif. Or, on a

$$\begin{aligned}
(S_\lambda\psi + C(\psi)\varphi_\lambda)(0) = (S_\lambda\psi + C(\psi)\varphi_\lambda)(1) \quad &\Longleftrightarrow \quad C(\psi) = -i\int_0^1 e^{i\lambda(y-1)}\psi(y)dy + C(\psi)e^{-i\lambda} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(1 - e^{-i\lambda}\right)C(\psi) = -ie^{-i\lambda}\int_0^1 e^{i\lambda y}\psi(y)dy \\
&\Longleftrightarrow \quad C(\psi) = \frac{i}{1 - e^{i\lambda}}\int_0^1 e^{i\lambda y}\psi(y)dy.
\end{aligned}$$

Enfin, $\|S_\lambda\psi + C(\psi)\varphi_\lambda\| \leqslant e^{|\Im\lambda|}\left(1 + \frac{\|\varphi_\lambda\|}{|1-e^{i\lambda}|}\right)\|\psi\|$ donc $(T_0 - \lambda Id)^{-1}$ est borné.

- Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $(T_2 - \lambda Id)$ est clairement injectif. Soit $\varphi \in \mathcal{D}_2$, on a, d'après une "formule d'intégration par parties" (voir deuxième partie),

$$\langle (T_2 - \lambda Id)\varphi, \varphi_{\overline{\lambda}}\rangle = \langle \varphi, (T_{-2} - \overline{\lambda}Id)\varphi_{\overline{\lambda}}\rangle = 0,$$

ainsi $\mathrm{Im}(T_2 - \lambda Id) \subseteq \varphi_{\overline{\lambda}}^{\perp}$ et $\sigma_{res}(T_2) = \mathbb{C}$.

$\square$

2 Opérateurs fermés et fermables

$\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2) \rangle := \langle u_1, u_2 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Définition 4 *Soit T un opérateur linéaire. On appelle* **graphe** *de T, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$*

$$G(T) := \Big\{ (\varphi, T\varphi) \quad / \quad \varphi \in D(T) \Big\}.$$

Définition 5 *Soit T un opérateur linéaire dont le domaine est dense dans $\mathcal{H}$.*

- *On dit que T est* **fermé** *si $G(T)$ est fermé dans $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$* i.e. *pour toute suite (φ_n) de $D(T)$ convergente de limite φ telle que $(T\varphi_n)$ est convergente de limite ψ, $\varphi \in D(T)$ et $\psi = T\varphi$.*

- *On dit que T est* **fermable** *s'il existe S fermé avec $T \subseteq S$ auquel cas il existe une plus petite extension fermée appelée* **fermeture** *et notée $\overline{T}$ qui vérifie $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$.*

Théorème 2 *Soit T un opérateur linéaire. Alors T est borné ssi T est fermé et $D(T) = \mathcal{H}$.*

Preuve Pour le sens direct, on a bien sûr $D(T) = \mathcal{H}$. Par ailleurs, soit $((\varphi_n, T\varphi_n))$ une suite de $G(T)$ qui converge vers (φ, ψ), alors $\varphi \in D(T) = \mathcal{H}$ et, comme T est borné, $(T\varphi_n)$ converge vers $T\varphi$ d'où $\psi = T\varphi$ par unicité de la limite.

Quant au sens réciproque, c'est exactement le **théorème du graphe fermé**. $\square$

Corollaire 3 *Soit T un opérateur linéaire fermé. Alors $\sigma'_{res}(T) = \emptyset$.*

Lemme 4 *Soit T un opérateur linéaire. Si T n'est pas fermé, alors $\sigma(T) = \mathbb{C}$ (ou, de manière équivalente, si $\rho(T) \neq \emptyset$, alors T est fermé).*

Preuve Supposons que $\rho(T) \neq \emptyset$ et soit $z \in \rho(T)$. $(T - zId)^{-1}$ est borné donc fermé et il en va de même pour $(T - zId)$ et T. $\square$

Exemple 1 T_0, T_1 et T_{-1} sont fermés.